Kompleksna analiza

Pavle Pandžić, 6. predavanje

Prisjetimo se:

Ako je (f_n) niz funkcija definiranih na Ω, kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω ako niz parcijalnih suma

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

konvergira lokalno uniformno na Ω.

Prisjetimo se:

Ako je (f_n) niz funkcija definiranih na Ω, kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω ako niz parcijalnih suma

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

konvergira lokalno uniformno na Ω.

Drugim riječima, za svaku točku iz Ω postoji krug oko te točke sadržan u Ω na kojem s_n konvergira uniformno. Ekvivalentno, s_n konvergira uniformno na svakom kompaktnom $K \subset \Omega$.

Poseban slučaj reda funkcija je red potencija:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{1}$$

gdje su a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$, z i z_0 kompleksni brojevi.

Poseban slučaj reda funkcija je red potencija:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{1}$$

gdje su a_n ($n \in \mathbb{N}_0$), z i z_0 kompleksni brojevi.

Abelova lema. Neka je $z' \neq z_0$. Ako red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ konvergira, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$, gdje je $r = |z' - z_0|$.

Sada ćemo pokazati da je maksimalan otvoren skup na kome red potencija (1) konvergira otvoren krug $K(z_0, r)$ za neki $r \in [0, +\infty]$, pri čemu je $K(z_0, 0) = \emptyset$, $K(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$.

Sada ćemo pokazati da je maksimalan otvoren skup na kome red potencija (1) konvergira otvoren krug $K(z_0, r)$ za neki $r \in [0, +\infty]$, pri čemu je $K(z_0, 0) = \emptyset$, $K(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$.

Odredit ćemo eksplicitnu formulu za radijus r tog "kruga konvergencije" u terminima koeficijenata a_n.

Limes superior

Neka je $(\rho_n)_n$ niz nenegativnih realnih brojeva ($\rho_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$).

Limes superior

Neka je $(\rho_n)_n$ niz nenegativnih realnih brojeva ($\rho_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$).

Ako je (ρ_n) neograničen, tada je $\limsup_n \rho_n = \infty$. Ako je (ρ_n) ograničen, tada je $\limsup_n \rho_n$ najveće gomilište tog niza.

Limes superior

Neka je $(\rho_n)_n$ niz nenegativnih realnih brojeva ($\rho_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$).

Ako je (ρ_n) neograničen, tada je $\limsup_n \rho_n = \infty$. Ako je (ρ_n) ograničen, tada je $\limsup_n \rho_n$ najveće gomilište tog niza.

Sjetimo se da svaki ograničen niz ima bar jedno gomilište. Zadatak: dokažite da za ograničen niz postoji najveće gomilište, odnosno da je supremum skupa svih gomilišta i sam gomilište niza (ρ_n).

Limes superior

Očito, u slučaju konvergentnog niza vrijedi $\limsup_n \rho_n = \lim \rho_n$.

Limes superior

Očito, u slučaju konvergentnog niza vrijedi $\limsup_n \rho_n = \lim \rho_n$.

Na primjer, ako je $\rho_n = 3 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, tada je to ograničen niz s gomilištima 2 i 4, pa je $\limsup_n \rho_n = 4$.

Limes superior

Očito, u slučaju konvergentnog niza vrijedi $\limsup_n \rho_n = \lim \rho_n$.

Na primjer, ako je $\rho_n = 3 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, tada je to ograničen niz s gomilištima 2 i 4, pa je $\limsup_n \rho_n = 4$.

Neka su (α_n) i (β_n) dva niza nenegativnih brojeva. Pretpostavimo da postoji $\beta = \lim_n \beta_n$. Tada je

$$\limsup_n (\alpha_n \beta_n) = \limsup_n \alpha_n \lim_n \beta_n,$$

$$\limsup_n (\alpha_n^{\beta_n}) = (\limsup_n \alpha_n)^{\lim_n \beta_n}.$$

Cauchyjev kriterij

Neka je $\sum_n a_n$ red kompleksnih brojeva. Neka je $q := \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

Cauchyjev kriterij

Neka je $\sum_n a_n$ red kompleksnih brojeva. Neka je $q := \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

Prema Cauchyjevom kriteriju za konvergenciju reda, ako je $q < 1$ tada red $\sum_n a_n$ apsolutno konvergira, a ako je $q > 1$ red $\sum_n a_n$ divergira.

Teorem (Cauchy-Hadamard)

Neka je zadan red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Neka je

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty].$$

Teorem (Cauchy-Hadamard)

Neka je zadan red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Neka je

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty].$$

(1) Ako je $r > 0$, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$. (Za $r = +\infty$, $K(z_0, r) = \mathbb{C}$.)

Teorem (Cauchy-Hadamard)

Neka je zadan red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Neka je

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty].$$

(1) Ako je $r > 0$, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$. (Za $r = +\infty$, $K(z_0, r) = \mathbb{C}$.)

(2) Ako je $r < +\infty$, tada za svaki $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r)$ red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ divergira.

Dokaz

(1) Neka je $z' \in K(z_0, r)$. Prema Cauchyjevom kriteriju, red brojeva $\sum_n a_n(z' - z_0)^n$ konvergira apsolutno, jer je

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z' - z_0)^n|} = |z' - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z' - z_0|}{r} < 1.$$

Dokaz

(1) Neka je $z' \in K(z_0, r)$. Prema Cauchyjevom kriteriju, red brojeva $\sum_n a_n(z' - z_0)^n$ konvergira apsolutno, jer je

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z' - z_0)^n|} = |z' - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z' - z_0|}{r} < 1.$$

Prema Abelovoj lemi, red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, |z' - z_0|)$.

Dokaz

(1) Neka je $z' \in K(z_0, r)$. Prema Cauchyjevom kriteriju, red brojeva $\sum_n a_n(z' - z_0)^n$ konvergira apsolutno, jer je

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z' - z_0)^n|} = |z' - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z' - z_0|}{r} < 1.$$

Prema Abelovoj lemi, red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, |z' - z_0|)$.

Zbog proizvoljnosti $z' \in K(z_0, r)$ slijedi tvrdnja (vidjeti kraj dokaza Abelove leme).

(2) Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z - z_0| > r$.

(2) Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z - z_0| > r$.

Tada je

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z - z_0|}{r} > 1.$$

(2) Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z - z_0| > r$.

Tada je

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z - z_0|}{r} > 1.$$

Dakle red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ divergira prema Cauchyjevom kriteriju. $\square$

Za red potencija red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ broj

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

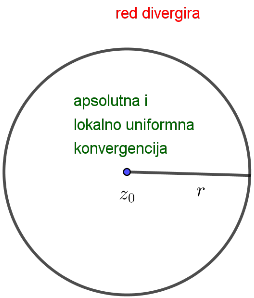
nazivamo **radijus konvergencije**, a $K(z_0, r)$ **krug konvergencije reda potencija**.

Za red potencija red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ broj

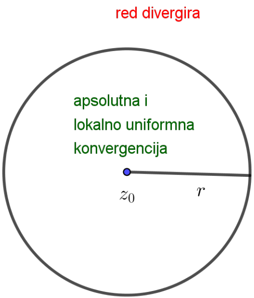
$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

nazivamo **radijus konvergencije**, a $K(z_0, r)$ **krug konvergencije reda potencija**.

Pritom podrazumijevamo da mogu nastupiti slučajevi $r = 0$ i $r = \infty$.



Prema prethodnom teoremu, na $K(z_0, r)$ red potencija konvergira apsolutno i lokalno uniformno, a izvan njega divergira; za točke s kružnice nemamo nikakav zaključak.



Prema prethodnom teoremu, na $K(z_0, r)$ red potencija konvergira apsolutno i lokalno uniformno, a izvan njega divergira; za točke s kružnice nemamo nikakav zaključak.

Iz toga slijedi da je krug konvergencije reda potencija najveći krug oko z_0 na kojem zadani red potencija konvergira.

Primjer

Odredimo radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ako je

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ neparan;} \\ 3^n, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Kako je $(\sqrt[n]{a_n}) = (2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, ...)$ slijedi da je $\limsup_n = 3$.

Primjer

Odredimo radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ako je

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ neparan;} \\ 3^n, & n \text{ paran.} \end{cases}$$

Kako je $(\sqrt[n]{a_n}) = (2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, ...)$ slijedi da je $\limsup_n = 3$.

Zato je traženi radijus konvergencije jednak $\frac{1}{3}$.

Teorem (Holomorfnost reda potencija)

Neka je $r > 0$ radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Definiramo funkciju

$$f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Teorem (Holomorfnost reda potencija)

Neka je $r > 0$ radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Definiramo funkciju

$$f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Tada je f holomorfna na $K(z_0, r)$ i za svaki $m \geq 0$ vrijedi

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z - z_0)^{n-m} \qquad (2)$$

za sve $z \in K(z_0, r)$.

Teorem (Holomorfnost reda potencija)

Neka je $r > 0$ radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Definiramo funkciju

$$f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Tada je f holomorfna na $K(z_0, r)$ i za svaki $m \geq 0$ vrijedi

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m} \tag{2}$$

za sve $z \in K(z_0, r)$.

Pritom je, za svaki $m \geq 0$, radijus konvergencije reda za $f^{(m)}$ također r.

Dokaz

S obzirom da zadani red potencija na krugu konvergencije $K(z_0, r)$ konvergira lokalno uniformno, prema Weierstrassovom teoremu o nizu holomorfnih funkcija slijedi da red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ možemo derivirati član po član, odakle slijedi (2).

Dokaz

S obzirom da zadani red potencija na krugu konvergencije $K(z_0, r)$ konvergira lokalno uniformno, prema Weierstrassovom teoremu o nizu holomorfnih funkcija slijedi da red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ možemo derivirati član po član, odakle slijedi (2).

Nadalje, radijus konvergencije reda za f' iznosi

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}} = \frac{1}{\limsup \left(\sqrt[n+1]{n+1} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\left(\lim \sqrt[n+1]{n+1} \limsup \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\left(1 \cdot \frac{1}{r}\right)^1} = r.$$

Dokaz

S obzirom da zadani red potencija na krugu konvergencije $K(z_0, r)$ konvergira lokalno uniformno, prema Weierstrassovom teoremu o nizu holomorfnih funkcija slijedi da red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ možemo derivirati član po član, odakle slijedi (2).

Nadalje, radijus konvergencije reda za f' iznosi

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}} = \frac{1}{\limsup \left(\sqrt[n+1]{n+1} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\left(\lim \sqrt[n+1]{n+1} \limsup \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\left(1 \cdot \frac{1}{r}\right)^1} = r.$$

Odavde slijedi da će i svakom narednom derivacijom reda potencija, novodobiveni red potencija zadržati isti radijus konvergencije r. $\square$

Uočimo da, uz pretpostavke kao u prethodnom teoremu, iz (2) slijedi da je

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, \quad \forall m \geq 0,$$

dakle, početni red potencija, odnosno funkcija f koju on definira, ima oblik

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Uočimo da, uz pretpostavke kao u prethodnom teoremu, iz (2) slijedi da je

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, \quad \forall m \geq 0,$$

dakle, početni red potencija, odnosno funkcija f koju on definira, ima oblik

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Sljedeći teorem govori o razvoju holomorfne funkcije u red potencija.

Teorem (o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije)

Neka je $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ te $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Teorem (o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije)

Neka je $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ te $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Tada je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r), \tag{3}$$

pri čemu gornji red lokalno uniformno konvergira.

Teorem (o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije)

Neka je $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ te $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Tada je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r), \tag{3}$$

pri čemu gornji red lokalno uniformno konvergira.

Formulu (3) nazivamo **Taylorov razvoj funkcije** f u red potencija u okolini točke z_0.

Dokaz

Neka je $\rho \in (0, r)$ i neka je γ kružnica s centrom u z_0 radijusa ρ.

Dokaz

Neka je $\rho \in (0, r)$ i neka je γ kružnica s centrom u z_0 radijusa ρ.

Tada za svaki $z \in K(z_0, \rho)$, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw. \tag{4}$$

Dokaz

Neka je $\rho \in (0, r)$ i neka je γ kružnica s centrom u z_0 radijusa ρ.

Tada za svaki $z \in K(z_0, \rho)$, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw. \qquad (4)$$

Neka je $z \in K(z_0, \rho)$. Tada za sve w na kružnici γ vrijedi

$$M := \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \left| \frac{z - z_0}{\rho} \right| < 1.$$

Zato geometrijski red $\sum_n M^n$ konvergira.

Zato geometrijski red $\sum_n M^n$ konvergira.

Sada Weierstrassov M-test povlači da red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

konvergira uniformno (po w) na γ.

Zato geometrijski red $\sum_n M^n$ konvergira.

Sada Weierstrassov M-test povlači da red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

konvergira uniformno (po w) na γ.

Nadalje, vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}.$$

Sada iz (4), koristeći Lemu o zamjeni limesa i integrala te generaliziranu CIF, zaključujemo da je

Sada iz (4), koristeći Lemu o zamjeni limesa i integrala te generaliziranu CIF, zaključujemo da je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw$$

Sada iz (4), koristeći Lemu o zamjeni limesa i integrala te generaliziranu CIF, zaključujemo da je

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw
\end{aligned}
$$

Sada iz (4), koristeći Lemu o zamjeni limesa i integrala te generaliziranu CIF, zaključujemo da je

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)
\end{aligned}
$$

Sada iz (4), koristeći Lemu o zamjeni limesa i integrala te generaliziranu CIF, zaključujemo da je

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \quad \square
\end{aligned}
$$

Primjer

Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f(z) = e^z$ za slučaj $z_0 = 0$.

Primjer

Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f(z) = e^z$ za slučaj $z_0 = 0$.

Kako je $f^{(n)}(z) = e^z$ za svaki $n \geq 0$ imamo da je $f^{(n)}(0) = 1$ za svaki $n \geq 0$.

Primjer

Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f(z) = e^z$ za slučaj $z_0 = 0$.

Kako je $f^{(n)}(z) = e^z$ za svaki $n \geq 0$ imamo da je $f^{(n)}(0) = 1$ za svaki $n \geq 0$.

Sada je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

za sve $z \in K(0, r)$, pri čemu je $r > 0$ takav da je $K(0, r)$ sadržan u domeni funkcije f.

Primjer

Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f(z) = e^z$ za slučaj $z_0 = 0$.

Kako je $f^{(n)}(z) = e^z$ za svaki $n \geq 0$ imamo da je $f^{(n)}(0) = 1$ za svaki $n \geq 0$.

Sada je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

za sve $z \in K(0, r)$, pri čemu je $r > 0$ takav da je $K(0, r)$ sadržan u domeni funkcije f.

Kako je u našem slučaju f cijela funkcija, to je $K(0, r) \subseteq \mathbb{C}$ za sve $r > 0$, pa je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Daljnji primjeri su

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Nultočke konačnog reda

Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$.

(a) z_0 je **nultočka od** f **konačnog reda** $m \in \mathbb{N}_0$ ako je

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Posebno, ako je $f(z_0) \neq 0$, z_0 je nultočka reda 0.

Nultočke konačnog reda

Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$.

(a) z_0 je **nultočka od** f **konačnog reda** $m \in \mathbb{N}_0$ ako je

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Posebno, ako je $f(z_0) \neq 0$, z_0 je nultočka reda 0.

(b) z_0 je **nultočka od** f **beskonačnog reda** ako je

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Nultočke konačnog reda

Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$.

(a) z_0 je **nultočka od f konačnog reda** $m \in \mathbb{N}_0$ ako je

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Posebno, ako je $f(z_0) \neq 0$, z_0 je nultočka reda 0.

(b) z_0 je **nultočka od f beskonačnog reda** ako je

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

(c) z_0 je **izolirana nultočka od f** ako postoji $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i $f(z) \neq 0, \quad \forall z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Teorem (o izoliranosti nultočke konačnog reda)

Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$ nultočka od f konačnog reda $m \geq 0$.

Teorem (o izoliranosti nultočke konačnog reda)

Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$ nultočka od f konačnog reda $m \geq 0$.

Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i postoji $g \in H(K(z_0, r))$ tako da je

(1) $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r)$,

(2) $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Teorem (o izoliranosti nultočke konačnog reda)

Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$ nultočka od f konačnog reda $m \geq 0$.

Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i postoji $g \in H(K(z_0, r))$ tako da je

(1) $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r)$,

(2) $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Posebno, $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, pa je z_0 izolirana nultočka od f.

Dokaz

Neka je $\rho > 0$ takav da $K(z_0, \rho) \subseteq \Omega$.

Dokaz

Neka je $\rho > 0$ takav da $K(z_0, \rho) \subseteq \Omega$.

Prema Teoremu o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, \rho),$$

pri čemu gornji red lokalno uniformno konvergira na $K(z_0, \rho)$.

Dokaz

Neka je $\rho > 0$ takav da $K(z_0, \rho) \subseteq \Omega$.

Prema Teoremu o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, \rho),$$

pri čemu gornji red lokalno uniformno konvergira na $K(z_0, \rho)$.

Kako je z_0 nultočka reda m imamo

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}(z - z_0)^n,$$

za sve $z \in K(z_0, \rho)$.

Neka je

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Neka je

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Lako se vidi da je radijus konvergencije ovog reda potencija jednak radijusu konvergencije reda potencija $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, a taj je $\geq \rho$.

Prema teoremu o holomorfnosti reda potencija zaključujemo da je

$$g \in H(K(z_0, \rho)).$$

Prema teoremu o holomorfnosti reda potencija zaključujemo da je

$$g \in H(K(z_0, \rho)).$$

Kako je z_0 nultočka reda m funkcije f, vrijedi

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0.$$

Prema teoremu o holomorfnosti reda potencija zaključujemo da je

$$g \in H(K(z_0, \rho)).$$

Kako je z_0 nultočka reda m funkcije f, vrijedi

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0.$$

Zbog neprekidnosti od g u z_0 tada postoji $r < \rho$ tako da je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r)$. $\square$

Teorem (Princip jedinstvenosti holomorfne funkcije)

Neka je Ω područje i $f \in H(\Omega)$. Neka je

$$N = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Teorem (Princip jedinstvenosti holomorfne funkcije)

Neka je Ω područje i $f \in H(\Omega)$. Neka je

$$N = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Ako N ima gomilište u Ω, tj. ako postoji $w \in \Omega$ takav da svaka okolina od w siječe $N \setminus \{w\}$, tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$.

Dokaz

Neka je $w \in \Omega$ gomilište skupa N. Tada postoji niz (w_n) u N takav da je $w_n \neq w$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $w = \lim_n w_n$.

Dokaz

Neka je $w \in \Omega$ gomilište skupa N. Tada postoji niz (w_n) u N takav da je $w_n \neq w$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $w = \lim_n w_n$.

Kako je f neprekidna, slijedi $f(w) = \lim_n f(w_n) = 0$. Prema tome, w je također nultočka od f.

Dokaz

Neka je $w \in \Omega$ gomilište skupa N. Tada postoji niz (w_n) u N takav da je $w_n \neq w$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $w = \lim_n w_n$.

Kako je f neprekidna, slijedi $f(w) = \lim_n f(w_n) = 0$. Prema tome, w je također nultočka od f.

Zbog postojanja niza nultočaka od f (različitih od w) koji teže u w, očito je da w nije izolirana nultočka od f.

Dokaz

Neka je $w \in \Omega$ gomilište skupa N. Tada postoji niz (w_n) u N takav da je $w_n \neq w$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $w = \lim_n w_n$.

Kako je f neprekidna, slijedi $f(w) = \lim_n f(w_n) = 0$. Prema tome, w je također nultočka od f.

Zbog postojanja niza nultočaka od f (različitih od w) koji teže u w, očito je da w nije izolirana nultočka od f.

Kako su sve nultočke konačnog reda izolirane po Teoremu o izoliranosti nultočke konačnog reda, zaključujemo da je w nultočka beskonačnog reda.

Uvedimo sada skupove

$$U = \{z \in \Omega : \ z \text{ je nultočka od } f \text{ beskonačnog reda}\},$$

$$V = \{z \in \Omega : \ z \text{ je nultočka od } f \text{ konačnog reda } m, \ m \geq 0\}.$$

Uvedimo sada skupove

$$U = \{z \in \Omega : \ z \text{ je nultočka od } f \text{ beskonačnog reda}\},$$

$$V = \{z \in \Omega : \ z \text{ je nultočka od } f \text{ konačnog reda } m, \ m \geq 0\}.$$

Očito je

$$U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = \Omega, \quad U \neq \emptyset,$$

(ovo zadnje vrijedi jer $w \in U$).

Uvedimo sada skupove

$$U = \{z \in \Omega : \ z \text{ je nultočka od } f \text{ beskonačnog reda}\},$$

$$V = \{z \in \Omega : \ z \text{ je nultočka od } f \text{ konačnog reda } m, \ m \geq 0\}.$$

Očito je

$$U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = \Omega, \quad U \neq \emptyset,$$

(ovo zadnje vrijedi jer $w \in U$).

Ako još pokažemo da su U i V otvoreni skupovi, tada će zbog povezanosti od Ω slijediti da je $V = \emptyset$. Onda je $\Omega = U$ i zato je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$, pa je tada tvrdnja dokazana.

Pokažimo najprije otvorenost od U. Neka je $z_0 \in U$ i neka je $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Pokažimo najprije otvorenost od U. Neka je $z_0 \in U$ i neka je $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Tada je, prema Teoremu o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Pokažimo najprije otvorenost od U. Neka je $z_0 \in U$ i neka je $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Tada je, prema Teoremu o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Kako je z_0 nultočka beskonačnog reda, slijedi

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Pokažimo najprije otvorenost od U. Neka je $z_0 \in U$ i neka je $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Tada je, prema Teoremu o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Kako je z_0 nultočka beskonačnog reda, slijedi

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Dakle za sve $z \in K(z_0, r)$ vrijedi

$$f^{(m)}(z) = 0, \quad \forall m \geq 0.$$

Zato je $K(z_0, r)$ sadržan u U. Time smo pokazali da je U otvoren skup.

Pokažimo otvorenost od V. Neka je $z_0 \in V$, to jest neka je z_0 nultočka konačnog reda $m \geq 0$.

Pokažimo otvorenost od V. Neka je $z_0 \in V$, to jest neka je z_0 nultočka konačnog reda $m \geq 0$.

Prema Teoremu o izoliranosti nultočaka konačnog reda postoji $r > 0$ tako da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Pokažimo otvorenost od V. Neka je $z_0 \in V$, to jest neka je z_0 nultočka konačnog reda $m \geq 0$.

Prema Teoremu o izoliranosti nultočaka konačnog reda postoji $r > 0$ tako da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

No, tada su sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ nultočke reda $m = 0$, pa je $K(z_0, r) \subseteq V$ i gotovi smo. $\square$

Pokažimo otvorenost od V. Neka je $z_0 \in V$, to jest neka je z_0 nultočka konačnog reda $m \geq 0$.

Prema Teoremu o izoliranosti nultočaka konačnog reda postoji $r > 0$ tako da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

No, tada su sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ nultočke reda $m = 0$, pa je $K(z_0, r) \subseteq V$ i gotovi smo. □

Sljedeći korolar malo bolje pojašnjava zašto se prethodni teorem naziva princip jedinstvenosti holomorfne funkcije.

Korolar

Neka su $f, g \in H(\Omega)$, pri čemu je Ω područje.

Korolar

Neka su $f, g \in H(\Omega)$, pri čemu je Ω područje.

Ako skup
$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$
ima gomilište u Ω, tada je $f = g$.

Korolar

Neka su $f, g \in H(\Omega)$, pri čemu je Ω područje.

Ako skup

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

ima gomilište u Ω, tada je $f = g$.

Dokaz. Primijenimo Princip jedinstvenosti na funkciju $f - g$. $\square$

Korolar

Neka su $f, g \in H(\Omega)$, pri čemu je Ω područje.

Ako skup
$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$
ima gomilište u Ω, tada je $f = g$.

Dokaz. Primijenimo Princip jedinstvenosti na funkciju $f - g$. $\square$

Ovaj korolar možemo koristiti za brzo dokazivanje analogona formula iz realne analize za istoimene kompleksne funkcije koje ih proširuju.

Primjer

Kako je $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ za sve $x \in \mathbb{R}$, onda primjenom prethodnog korolara na funkcije $f(z) = \sin(2z)$ i $g(z) = 2 \sin z \cos z$ slijedi $f(z) = g(z)$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

Primjer

Kako je $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ za sve $x \in \mathbb{R}$, onda primjenom prethodnog korolara na funkcije $f(z) = \sin(2z)$ i $g(z) = 2\sin z \cos z$ slijedi $f(z) = g(z)$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

Naime, skup $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ sadrži $\mathbb{R}$ i zato ima gomilište u $\Omega = \mathbb{C}$.

Primjer

Kako je $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ za sve $x \in \mathbb{R}$, onda primjenom prethodnog korolara na funkcije $f(z) = \sin(2z)$ i $g(z) = 2\sin z \cos z$ slijedi $f(z) = g(z)$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

Naime, skup $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ sadrži $\mathbb{R}$ i zato ima gomilište u $\Omega = \mathbb{C}$.

Dakle, vrijedi $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ za sve $z \in \mathbb{C}$. (Tvrdnju dokažite i direktno iz formula za sin i cos.)

Zadatak

Odredite sve cijele funkcije za koje vrijedi

1. $f(q) = 0$ za sve $q \in \mathbb{Q}$;
2. $f(x) = \cos x + i \sin x$ za sve $x \in \mathbb{R}$.